

- ٢٢) إذا كان طول حرف مكعب = ٥ سم فإن طول قطره = ومساحته =
- ٢٣) إذا كانت أبعاد متوازي مستطيلات هي ٤ ، ٣ ، ١٢ سم فإن طول قطره =
- ٢٤) إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة فإنهما
- ٢٥) قطر متوازي السطوح هو قطعة مستقيمة تصل بين
- ٢٦) $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$ منشور ثلاثي . خط تقاطع المستوى $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$ مع المستوى $\bar{A} \bar{A} \bar{C}$ هو المستقيم
- ٢٧) المستقيمان يكونان متخالفان إذا كان
- ٢٨) المستقيم l يكون عموديا على المستوى s إذا كان
- ٢٩) إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين متخالفين يساوي 90° فيقال لهما
- ٣٠) متوازي مستطيلات أبعاده s ، v ، e فإذا كان $s = ٤$ سم ، $v = ٨$ سم ، $e = ٩٢$ سم ، $s = ٤$ ، $v = ٤$ ، $e = ٤$ سم فإن حجمه يساوي سم^٣ ، وطول قطره يساوي سم
- الحل :
- ١) الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي إحدى الزوايا التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم مرسوم من نقطة عليه موازيا الآخر
- ٢) يتوازي المستقيمان l ، l' إذا وفقط إذا كان
- ١- يجمعهما مستو واحد $\Phi = l \cap l' = \emptyset$
- ٣) إذا وازى مستقيم مستويا فإنه يوازي جميع المستقيمات التي تنشأ عن تقاطع هذا المستوى مع المستويات التي تحتوي ذلك المستقيم
- ٤) إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيما في المستوى فإنه يوازي ذلك المستوى
- ٥) إذا قطع مستوى مستويين متوازيين فخط تقاطعه معهما يكونان متوازيين
- ٦) إذا وازى مستقيم كلا من مستويين متقاطعين فإنه يوازي خط تقاطعهما
- ٧) إذا قطعت عدة مستويات متوازية بمستقيمين فإن أطوال القطع المستقيمة المحصورة بينها تكون متناسبة
- ٨) إذا تقاطع مستقيمان في مستو وكانا موازيين لمستقيمين متقاطعين في مستو آخر كان مستوى المستقيمين الأولين موازيا لمستوى المستقيمين الأخيرين

١. أكمل :

- ١) الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي
- ٢) يتوازي المستقيمان l ، l' إذا وفقط إذا كان
- ١- ٢-
- ٣) إذا وازى مستقيم مستويا فإنه يوازي (مطلوب بالبرهان)
- ٤) إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيما في المستوى فإنه
- ٥) إذا قطع مستوى مستويين متوازيين فخط تقاطعه
- ٦) إذا وازى مستقيم كلا من مستويين متقاطعين فإنه
- ٧) إذا قطعت عدة مستويات متوازية بمستقيمين فإن
- ٨) إذا تقاطع مستقيمان في مستو وكانا موازيين لمستقيمين متقاطعين في مستو آخر كان
- ٩) إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستقيمين مستويين معا وغير متوازيين فإنه
- ١٠) المستقيمان العموديان على مستو واحد
- ١١) إذا كان مستقيم عموديا على أحد مستويين متوازيين فإنه
- ١٢) الزاوية بين قطعة مستقيمة ومستو هي الزاوية بين القطعة المستقيمة و
- ١٣) إذا رسم مستقيم مائل على مستو وكان عموديا على مستقيم في المستوى فإن مسقط المستقيم المائل (يطلب البرهان)
- ١٤) إذا رسم مستقيم مائل على مستو وكان مسقطه على المستوى عموديا على مستقيم فيه كان هذا (يطلب البرهان)
- ١٥) الزاوية المستوية لزاوية زوجية هي الزاوية
- ١٦) قياس الزاوية الزوجية هو قياس
- ١٧) الهرم القائم هو هرم قاعدته
- ١٨) إذا كان مستقيم عموديا على مستو فكل مستو يحوي هذا المستقيم (يطلب بالبرهان)
- ١٩) إذا تعامد مستويان فكل مستقيم في أحدهما عمودي على خط التقاطع
- ٢٠) إذا كان كل من مستويين متقاطعين عموديا على مستو ثالث كان خط تقاطع هذين المستويين
- ٢١) إذا كان طول قطر مكعب $\sqrt[3]{٥}$ فإن مساحته

- (١) المستقيم العمودي على مستقيم في المستوى يكون عموديا على ذلك المستوى
 (٢) إذا وازى مستقيم مستويا فإنه يوازي كل مستقيم واقع في المستوى
 (٣) إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستويين فإنهما يكونان متوازيين
 (٤) تقاس الزاوية الزوجية بين مستويين برسم مستوى عمودي على خط تقاطع المستويين
 (٥) أي ثلاث نقط تعين مستوى واحد فقط
 (٦) إذا كان المستويين S ، V متوازيين وكان المستقيم L $\perp S$ فإن $L \parallel V$
 (٧) إذا كان المستويان S ، V متوازيين وكان المستقيم $L \perp S$ فإن $L \perp V$
 (٨) المستويان الموازيان لمستقيم واحد متوازيان
 (٩) يتعامد المستقيمان إذا كان كل منهما عموديا على نفس المستوى
 (١٠) المستقيمان العموديان على مستقيم ثالث في الفراغ متوازيان

الحل :

١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
x	x	x	√	√	x	√	√	x	x

٣. إذا كان L ، L مستقيمين ، وكان S ، V مستويين أذكر صحة أو خطأ العبارات التالية بعد إعادة كتابتها في ورقة الإجابة
 أ. إذا كان $L \perp L$ ، $L \cap L = \Phi$ فإن $L \parallel L$ أو $L \perp L$ ، متخالفين
 ب. إذا كان $L \parallel L$ ، $S \parallel L$ و $L \parallel S$ فإن $L \parallel L$
 ج. إذا كان $S \parallel L$ و $V \parallel L$ فإن $S \parallel V$
 د. إذا كان $L \perp S$ ، $L \perp V$ ، $S \perp V$ فإن $L \parallel L$
 هـ. إذا كان $L \perp S$ ، $S \cap V = \Phi$ فإن $L \parallel V$

الحل :

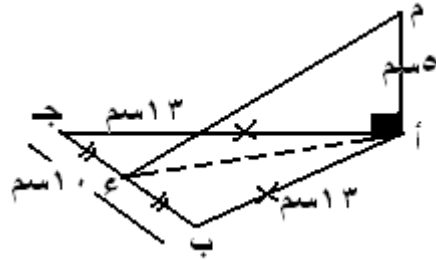
أ	ب	ج	د	هـ
√	x	x	x	√

٤. حل بنفسك : أوجد أطوال الأضلاع المشار إليها في كل شكل مما يلي :

- (٩) إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستقيمين مستويين معا وغير متوازيين فإنه فإنه يكون عموديا على مستويهما
 (١٠) المستقيمان العموديان على مستو واحد متوازيان
 (١١) إذا كان مستقيم عموديا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديا على الآخر
 (١٢) الزاوية بين قطعة مستقيمة ومستو هي الزاوية بين القطعة المستقيمة ومسقطها على المستوى
 (١٣) إذا رسم مستقيم مانل على مستو وكان عموديا على مستقيم في المستوى فإن مسقط المستقيم المائل على المستوى يكون عموديا على هذا المستقيم
 (١٤) إذا رسم مستقيم مانل على مستو وكان مسقطه على المستوى عموديا على مستقيم فيه كان هذا المستقيم المائل عموديا على ذلك المستقيم
 (١٥) الزاوية المستوية لزاوية زوجية هي الزاوية التي تنشأ عن تقاطع الزاوية الزوجية مع أي مستو عموديا على حافتها
 (١٦) قياس الزاوية الزوجية هو قياس أي من زاويتها المستوية
 (١٧) الهرم القائم هو هرم قاعدته سطح مضلع منتظم مركزه هو موقع العمود النازل من رأس الهرم عليها
 (١٨) إذا كان مستقيم عموديا على مستو فكل مستو يحوي هذا المستقيم يكون عموديا على ذلك المستوى
 (١٩) إذا تعامد مستويان فكل مستقيم في أحدهما عمودي على خط التقاطع يكون عموديا على المستوى الآخر
 (٢٠) إذا كان كل من مستويين متقاطعين عموديا على مستو ثالث كان خط تقاطع هذين المستويين عموديا على المستوى الثالث
 (٢١) إذا كان طول قطر مكعب $\sqrt{5}$ فإن مساحته 150 سم^٢
 (٢٢) إذا كان طول حرف مكعب = 5 سم فإن طول قطره = $\sqrt{3}$ ومساحته = 150 سم^٢
 (٢٣) إذا كانت أبعاد متوازي مستطيلات هي 3 سم ، 4 سم ، 12 سم فإن طول قطره = 13 سم
 (٢٤) إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة فإنهما ينطبقان
 (٢٥) قطر متوازي السطوح هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسيين غير واقعين في وجه واحد
 (٢٦) أ ب ج د منشور ثلاثي . خط تقاطع المستوى أ ب ج مع المستوى $\bar{\bar{A}} \bar{\bar{B}} \bar{\bar{C}}$
 أ ج د هو المستقيم $\bar{\bar{A}} \bar{\bar{D}}$
 (٢٧) المستقيمان يكونان متخالفان إذا لم يجمعهما مستو واحد
 (٢٨) المستقيم L يكون عموديا على المستوى S إذا كان عموديا على جميع المستقيمتان في المستوى S

٢. بين العبارات الصحيحة والعبارات الخاطئة فيما يأتي مع تصحيح الخطأ:

٦. م أب ج هرم ثلاثي فيه م أ \perp المستوى أب ج، أب = أج = ١٣ سم،
ب ج = ١٠ سم، م أ = ٥ سم، ع منتصف ب ج



(١) احسب طول أ ع واثبت أن م ع \perp ب ج

(٢) أوجد قياس الزاوية الزوجية (م - ب ج - أ)

(٣) أوجد مساحة المثلث م ب ج

(٤) اثبت أن المستويين م أ ع، م ب ج متعامدان

(٥) اثبت أن المستويين م أ ع، أب ج متعامدان

الحل:

في Δ أب ج المتساوي الساقين

\therefore ع منتصف ب ج \leftarrow \therefore أ ع \perp ب ج

$$(أ ع)^2 = (أ ب)^2 - (ب ع)^2 = 169 - 25 = 144 \text{ ومنها } أ ع = 12 \text{ سم}$$

\therefore م أ \perp المستوى أب ج

\therefore م ع مائل مسقطه أ ع

\therefore أ ع \perp ب ج \supset المستوى أب ج

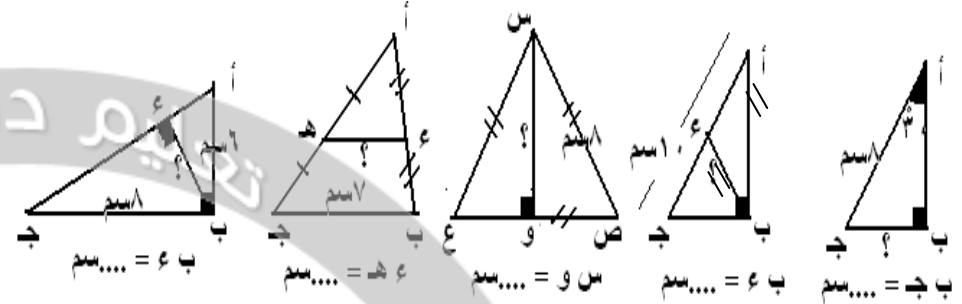
\therefore المائل م ع \perp ب ج

ثانياً: الزاوية المستوية للزاوية الزوجية م - ب ج - أ هي $\hat{أ ع م}$

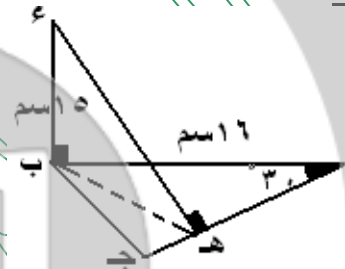
$$\hat{ظا} (أ ع م) = \frac{5}{12} \leftarrow \text{ق (م - ب ج - أ)} = 37^\circ - 22^\circ$$

$$\text{ثالثاً: في } \Delta م أ ع \quad (م ع)^2 = 144 + 25 = 169$$

$$م ع = 13 \text{ سم}$$



٥. " مايو ١٩٩٨ " في الشكل المقابل:



ق (ب أ ج) = 30° ، أب = ١٦ سم، ع ب \perp المستوى أب ج، ع هـ

\perp أ ج، فإذا كان ب ع = ١٥ سم احسب طول ع هـ

[١٧ سم]

الحل:

\therefore ع ب \perp المستوى أب ج، ع هـ مائل مسقطه ب هـ،

المائل ع هـ \perp أ ج \supset المستوى أب ج

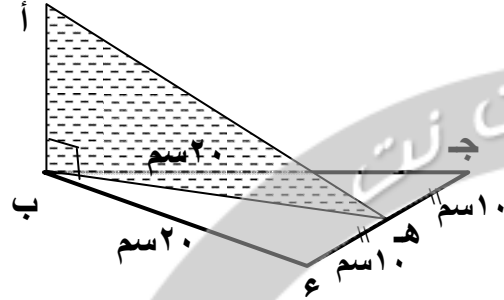
\therefore المسقط ب هـ \perp أ ج

في Δ ب هـ أ القائم الزاوية في هـ، ب هـ مقابل للزاوية 30°

$$ب هـ = \frac{1}{2} \text{ طول الوتر } أ ب = 8 \text{ سم}$$

في Δ ع ب هـ القائم الزاوية في ب

$$(ع هـ)^2 = (ع ب)^2 + (ب هـ)^2 = 225 + 64 = 289 \text{ ومنها } ع هـ = 17 \text{ سم}$$



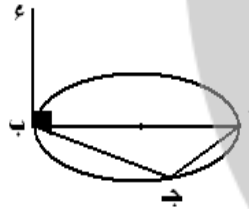
أ ه ب هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية أ - ج - ب - د

$$\text{ظل } \hat{أ ه ب} = \frac{\sqrt{3} \times 10}{\sqrt{10}} = 1 \Rightarrow \text{ق (أ ه ب)} = 45^\circ$$

$$\text{ق (أ - ج - ب - د)} = 45^\circ$$

٨. " مصر ٩٠ "

ج د لدائرة قطرها أ ب ، رسم ع ب عموديا على مستوى الدائرة



اثبت أن :

(١) المستوى ع ب ج \perp المستوى أ ب ج

(٢) المستوى ع ب ج \perp المستوى أ ب ج

الحل :

∴ ع ب \perp مستوى الدائرة أ ب ج

، ع ب \subset المستوى ع ب ج

∴ المستويان ع ب ج ، أ ب ج متعامدان

$$\text{مساحة } (\Delta م ب ج) = \frac{1}{2} \times م ب \times ج = 6 \times 5 = 15 \text{ سم}^2$$

رابعا: ∴ ب ج \perp كل من م ع ، أ ع

∴ ب ج \perp المستوى م أ ع

∴ ب ج \subset المستوى م ب ج

∴ المستويان م أ ع ، م ب ج متعامدان

خامسا: ب ج \perp المستوى م أ ع

، ب ج \subset المستوى أ ب ج ∴ المستويان م أ ع ، أ ب ج متعامدان

٧. " مصر ١٩٩٥ "

أ ب ج ه هرم ثلاثي فيه أ ب \perp المستوى ب ج ه ، ه منتصف ج ، فإذا

كان أ ب = $\sqrt{10}$ سم ، Δ ب ج ه متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ،

فاحسب ب ه ثم أوجد ق (أ - ج - ب - د)

الحل :

في Δ ب ج ه المتساوي الأضلاع

ه منتصف ج ه ∴ ب ه \perp ج ه

ب ه = $\sqrt{10}$ سم من نظرية فيثاغورس

أ ب \perp المستوى ب ج ه

أ ه مائل مسقطه ب ه

ب ه \perp ج ه \subset المستوى ب ج ه

أ ه \perp ج ه

س ، ص مستويان متقاطعان في $\overline{أب}$ رسم $\overline{جـد}$ في المستوى س بحيث
كان $\overline{جـد} // ص$ ، ورسم $\overline{هـو}$ في المستوى ص بحيث $\overline{هـو} // س$ اثبت أن
 $\overline{جـد} // هـو$

الحل :

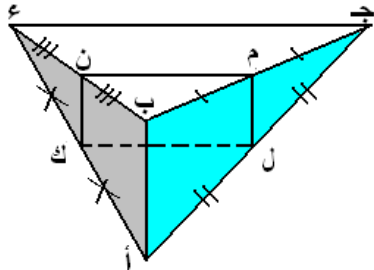
$\overline{جـد} //$ المستوى ص ، المستوى س يحوي $\overline{جـد}$ ويقطع المستوى ص في $\overline{أب}$

$\overline{جـد} // \overline{أب}$ (١)

بالمثل $\overline{هـو} // \overline{أب}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن $\overline{جـد} // هـو$

١٠. " أغسطس ١٩٨٨ "



جـب أ، ع $\overline{أب}$ مثلثان في مستويين مختلفين . إذا كان ل ، م ، ك ، ن منتصفات
 $\overline{جـأ}$ ، $\overline{جـب}$ ، $\overline{عـأ}$ ، $\overline{عـب}$ على الترتيب اثبت أن :

(١) $\overline{ل م} // \overline{ك ن}$

(٢) $\overline{أب} //$ المستوى ل م ن ك

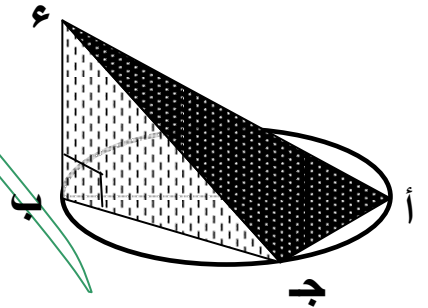
(٣) الشكل ل م ن ك متوازي أضلاع

الحل :

في $\Delta جـأب$

ل ، م منتصفي الضلعين $\overline{جـأ}$ ، $\overline{جـب}$

$\overline{ل م} // \overline{أب}$ ، $ل م = \frac{١}{٢} \overline{أب}$ (١)



ثانياً : $\overline{أب}$ قطري الدائرة $\leftarrow \therefore \angle (أ ج ب) = ٩٠^\circ$

$\therefore \overline{أ ج} \perp \overline{ب ج}$

$\therefore \overline{ع ب} \perp$ مستوى الدائرة

$\therefore \overline{ع ج}$ مائل مسقطه $\overline{ب ج}$

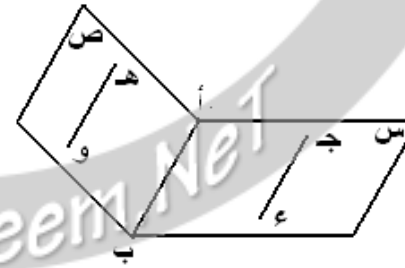
$\therefore \overline{ب ج} \perp \overline{أ ج}$ اثباتاً (١)

$\therefore \overline{ع ج} \perp \overline{أ ج}$ (٢)

من (١) ، (٢) $\overline{أ ج} \perp$ المستوى $\overline{ع ب ج}$

$\overline{أ ج} \supset$ المستوى $\overline{أ ع ج} \leftarrow$ المستوى $\overline{ع ب ج}$

٩. " أغسطس ١٩٩٩ - " مايو ١٩٦٦ "



بالمثل

ك ن // أ ب ، ك ن = $\frac{1}{4}$ أ ب (٢)من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل ل م ن ك متوازي أضلاع
: ل م // ك ن وهو المطلوب أولاً: أ ب // ل م ، ل م \supset المستوى ل م ن ك

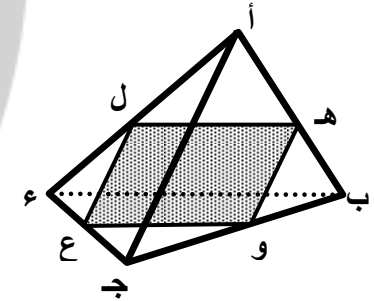
: أ ب // المستوى ل م ن ك

١١. دور أول ٢٠١١

أ ب ج د ه م ثلاثي ، رسم المستوى س يوازي كل من أ ج ، ب د فقطع
أ ب ، ب ج ، ج د ، د ه ، ه م ، م أ في ه ، و ، ع ، ل على الترتيب اثبت أن :

$$1 = \frac{ه م}{ب د} + \frac{ه و}{أ ج}$$

الحل :



أ ج // المستوى ه و ع ل

والمستوى أ ب ج يحوى أ ج ويقطع المستوى ه و ع ل فى ه و

أ ج // ه و

المثلث ب ه و يشابه المثلث ب أ ج $\Leftarrow \frac{ه و}{أ ج} = \frac{ب ه}{ب أ}$ (١)

ب د // المستوى ه و ع ل

والمستوى ب د ه يحوى ب د ويقطع المستوى ه و ع ل فى ه ل

ب د // ه ل

المثلث أ ه ل يشابه المثلث أ ب د $\Leftarrow \frac{ه ل}{ب د} = \frac{ه أ}{ب أ}$ (٢)بجمع (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{ه و}{أ ج} + \frac{ه ل}{ب د} = \frac{ه أ}{ب أ} + \frac{ه ب}{ب أ} = \frac{ه أ + ه ب}{ب أ} = \frac{ه ل}{ب أ} = 1$

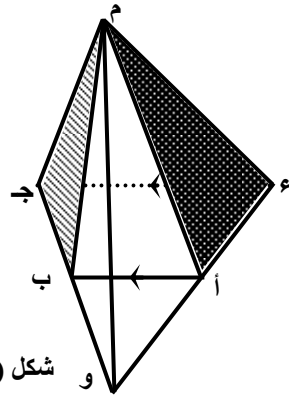
١٢. م أ ب ج د ه م رباعي قاعدته أ ب ج د شبه منحرف فيه أ ب // ع د

أوجد :

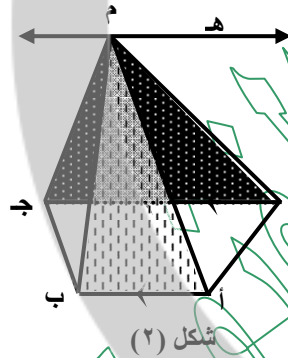
(أ) خط تقاطع المستويين م أ ع ، م ب د

(ب) خط تقاطع المستويين م أ ب ، م ع د مع تفسير الحل

الحل :



شكل (١) و



شكل (٢)

(أ) فى شكل (١) : المستوى م أ ع // م ب د = م و

(ب) فى شكل (٢) : المستوى م أ ب // م ع د = م ه حيث م ه // أ ب // ع د

تفسير الحل :

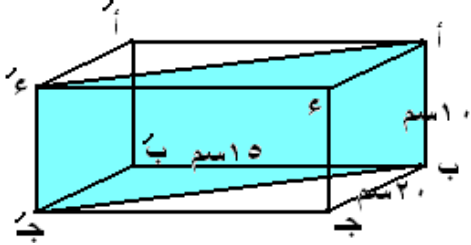
أ ب // ع د ، أ ب \supset المستوى أ م ب ، ع د \supset المستوى ع م د

خط تقاطع المستويين أ م ب ، ع م د هو المستقيم م ه يوازي كل من المستقيمين أ ب

ع د ،

أب جء أ ب جء متوازي مستطيلات فيه أ ب = ١٠ سم ، ب جء = ٢٠ سم ،

ب ب = ١٥ سم



(١) اثبت أن أ ب جء مستطيل واحسب مساحته

(٢) احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جء ، أ ب جء

الحل :

أ ب // أ' ب' ويساويه في الطول (من خواص متوازي المستطيلات)

الشكل أ ب جء' متوازي أضلاع ... (١)

أ ب ⊥ المستوى ب ج جء'

أ ب ⊥ أ ب جء' (٢)

من (١)، (٢) الشكل أ ب جء' متوازي أضلاع فيه أ ب جء' قائمة
∴ أ ب جء' مستطيل

في المثلث ب ج جء' القائم الزاوية في ج

$$(ب جء')^2 = (ب جء')^2 + (ج جء')^2 = 225 + 400 = 625$$

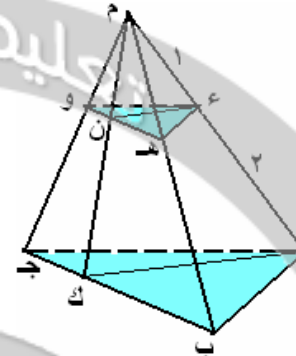
$$ب جء' = \sqrt{625} = 25 \text{ سم}$$

$$\text{مساحة المستطيل أ ب جء'} = ب جء' \times أ ب = 25 \times 10 = 250 \text{ سم}^2$$

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جء' ، أ ب جء هي ج ب جء'

$$\text{ظا (ج ب جء')} = \frac{15}{25} = 0.75 \text{ ومنها ق (ج ب جء')} = 36.87^\circ$$

١٣ . " مايو ٩٨ " - " أغسطس ٩٦ "



م أ ب جء هرم ثلاثي . أخذت النقط ء ، هـ ، و على الأخراف م أ ، م ب ، م جء

$$\text{على الترتيب بحيث } \frac{م هـ}{م ب} = \frac{م و}{م جء} = \frac{١}{٣}$$

اثبت أن : المستوى ء هو // المستوى أ ب جء

وإذا كانت ك و ب جء ، م ك ∩ هو = {ن} اثبت أن :

$$\overline{ع ن} // \overline{أ ك} ، أ ك = ٣ ع ن$$

$$\text{الحل : } \frac{م هـ}{م ب} = \frac{م و}{م جء}$$

∴ ء هـ // أ ب (١)

بالمثل هو // ب جء (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن : المستوى ء هو // المستوى أ ب جء

∴ المستوى م أ ك يقطع المستويين المتوازيين ء هو ، أ ب جء في ع ن ، أ ك

$$\overline{ع ن} // \overline{أ ك}$$

$$\Delta م ع ن \sim \Delta م أ ك \Rightarrow \frac{ع ن}{م أ} = \frac{ع ن}{م أ} = \frac{١}{٣} \Rightarrow أ ك = ٣ ع ن$$

١٤ . " مايو ٩٨ "

أ ب ج د مستطيل فيه أ ب = ٣ سم ، أ ع = ٤ سم ، رسم أ م عموديا على مستوى المستطيل ثم رسم م ن \perp ب ع ليقطعه في ن . احسب طول أ ن ، وإذا كان أ م = ٤ سم ، أوجد ظل الزاوية الزوجية (م - ب ع - أ)

الحل :

∴ م أ \perp المستوى أ ب ج د

∴ م ن مائل مسقطه أ ن

∴ م ن \perp ب ع معطى

∴ أ ن \perp ب ع

الشكل أ ب ج د مستطيل زواياه قوائم

في Δ ب أ ع القائم الزاوية في أ

$$(ب ع)^2 = (ب أ)^2 + (أ ع)^2 = 9 + 16 = 25 \text{ ومنها } ب ع = 5 \text{ سم}$$

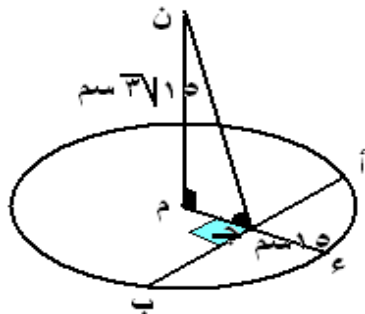
$$أ ن = \frac{أ ب \times أ ع}{ب ع} = \frac{3 \times 4}{5} = 2.4 \text{ سم}$$

الزاوية أن م هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية م - ب ع - أ

$$\tan \hat{م أن} = \frac{أ ع}{ب ع} = \frac{4}{5} \text{ ومنها } \hat{م أن} = \tan^{-1} \left(\frac{4}{5} \right) = (م - ب ع - أ) = 38.7^\circ$$

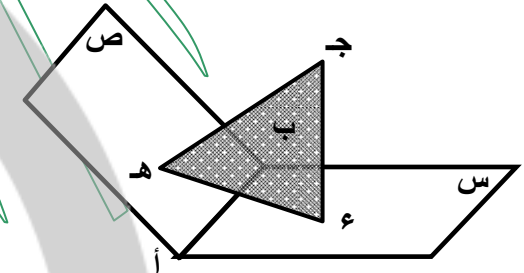
١٧. " مايو ٩٢ " أ ب وتر في دائرة مركزها م ، طول نصف قطرها

٣٠ سم ، رسم م ج \perp أ ب ليقطعه في ج ويقطع الدائرة في ع ، رسم م ن \perp مستوى الدائرة



س ، ص مستويان متقاطعان في المستقيم أ ب ومن نقطة ج لاتنتمي لأى من المستويين رسم ج د عموديا على المستوى س ليقطعه في د ، ج ه عموديا على المستوى ص ليقطعه في ه اثبت أن : أ ب \perp ع ه

الحل :



ج د \perp المستوى س

ج د \perp أ ب (١)

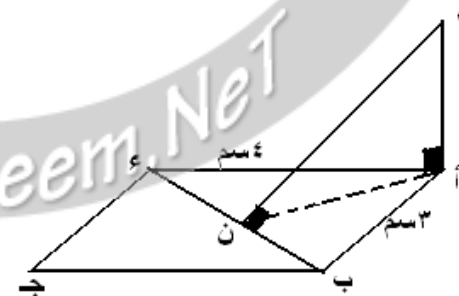
ج ه \perp المستوى ص

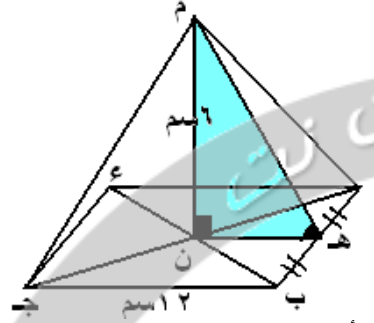
ج ه \perp أ ب (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : أ ب \perp المستوى ج د ه

أ ب \perp ع ه

١٦. " مايو ٨٩ "





∴ أ ب ج د مربع

قطراه متساويان في الطول وينصف كل منهما الآخر \Leftarrow ن أ = ن ب
في Δ ن أ ب المتساوي الساقين

∴ ه منتصف أ ب \Leftarrow ∴ ن ه \perp أ ب

∴ م ن \perp المستوى أ ب ج د

م ه مانل مسقطه ن ه ،

∴ ن ه \perp أ ب اثباتا (١)

∴ م ه \perp أ ب (٢)

من (١) ، (٢) يتبع أن

∴ أ ب \perp كل من م ه ، ن ه

∴ أ ب \perp مستويهما م ن ه

م ه ن هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (م - أ ب - ع)

ن ه $\frac{1}{2}$ ب ج = ٦ سم

ظا (م ه ن) = $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ \Leftarrow ∴ ق (م ه ن) = ٥٥°

∴ ق (م - أ ب - ع) = ٥٥°

١٩. دور أول ٢٠١١

اثبت أن ن ج \perp أ ب . وإذا كان ع ج = ١٥ سم ، ن م = $\sqrt[3]{15}$ سم

الجواب [٦٠]

احسب ق (ن - أ ب - م)

الحل:

م ن \perp مستوى الدائرة م

∴ ن ج مانل مسقطه م ج

∴ م ج \perp أ ب معطى

∴ المائل ن ج \perp أ ب

نق = ٣٠ سم \Leftarrow م ع = ٣٠ سم

م ج = ٣٠ - ١٥ = ١٥ سم

الزاوية ن ج م هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية ن - أ ب - م

ظان ج م = $\frac{\sqrt[3]{15}}{15}$

∴ ق (ن ج م) = ٦٠° ومنها ∴ ق (ن - أ ب - م) = ٦٠°

١٨. " مايو ٩٧ " أ ب ج د مربع طول ضلعه ١٢ سم ، تقاطع قطراه في

ن ، رسم ن م \perp المستوى أ ب ج د وكان م ن = ٦ سم ، ه منتصف أ ب

اثبت أن :

(١) المستوى م أ ج \perp المستوى أ ب ج د

(٢) أ ب \perp المستوى م ن ه

(٣) أوجد ق (م - أ ب - ع)

الحل:

∴ م ن \perp المستوى أ ب ج د

، م ن \perp المستوى م أ ج

المستوى م أ ج \perp المستوى أ ب ج د

$$أه = 2\sqrt{4}$$

ظا (أه م) = ١ ومنها ق (أه م) = ٤٥°

(١) زاوية ميل م جـ على المستوى أب جـ هي زاوية (أ جـ م)

$$\text{ظا (أ جـ م)} = \frac{2\sqrt{4}}{2\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$$

(٢) أ جـ ⊥ بـ عـ ، م هـ ⊥ بـ عـ اثباتا

بـ عـ عمودى على كل من أ جـ ، م هـ

بـ عـ عموديا على مستويهما م أ جـ

والمستوى م بـ عـ يحوى بـ عـ

المستويان م أ جـ ، م بـ عـ متعامدان

٢٠. أغسطس ٩٩

أ ب جـ / أ ب / جـ / منشور ثلاثي مائل فيه الوجه ب جـ / بـ / مستطيل رسم بـ عـ

⊥ أ أ' فقطعها في النقطة عـ . اثبت أن أ أ' عمودية على المستوى بـ عـ جـ .

وإذا كان أب = ٥ سم ، بـ عـ = ٣ سم فأوجد قياس الزاوية بين أب والمستوى

بـ عـ جـ

الجواب [٥٣ ° ٨]

أ أ' // ب ب' ، ب ب' ⊥ ب جـ

أ أ' ⊥ ب جـ (١)

لكن أ أ' ⊥ بـ عـ معطى (٢)

من (١) ، (٢) أ أ' ⊥ المستوى بـ عـ جـ

أ ب مائل على المستوى بـ عـ جـ ومسقطها بـ عـ

أ ب هي زاوية ميل أب على المستوى بـ عـ جـ

$$\text{جتا } \hat{ب} = \frac{بـ عـ}{أ ب} = \frac{٣}{٥} \leftarrow \text{ق (أ ب ع)} = ٤٨^\circ \hat{ب} = ٥٣^\circ$$

أ ب جـ عـ مربع طول ضلعه ٨ سم تقاطع قطراه في هـ ، رسمت أ م عمودية على

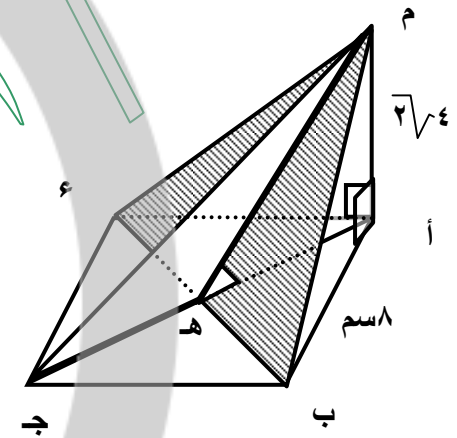
مستوى المربع بحيث كان أ م = $2\sqrt{4}$ سم .

(١) أوجد ق (أ - ب - ع - م)

(٢) أوجد ظل زاوية ميل م جـ على المستوى أب جـ

(٣) اثبت أن المستوى م أ جـ عمودى على المستوى م بـ عـ

الحل :



أ ب جـ عـ مربع قطراه أ جـ ، بـ عـ متعامدان وينصف كل منهما الآخر

أ م ⊥ المستوى أب جـ

أ م ⊥ أ ب ، أ م ⊥ أ عـ

في المثلث م أ ب القائم الزاوية فى أ

$$\text{م (ب)} = ٩٦ = ٢(٨) + ٢(2\sqrt{4}) = ٢(ب)$$

م ب = $2\sqrt{4}$ سم بالمثل م عـ = $2\sqrt{4}$ سم

فى المثلث م بـ عـ المتساوى الساقين

هـ منتصف القاعدة بـ عـ ← م هـ ⊥ بـ عـ

زاوية (أ هـ م) هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (أ - ب - ع - م)

أ ب = ب جـ = ٨ سم

أ جـ = $2\sqrt{8}$ سم من نظرية فيثاغورث

وحيث أن المستوى ب' ب' ع يحوى ب' ب'
المستوى ب' ب' ع عمودى على المستوى أ ب ج ع
ثانياً: بفرض أن أ ب = أ ع = ل
فى المثلث ب' أ ع القائم الزاوية فى أ
ب' ب' ل = $\sqrt{2}$ لماذا؟ ، ب' ب' = $\sqrt{2}$ ل

ع' ب' مائل على المستوى أ ب ج ع ومسقطه ب' ع

زاوية ميل ع' ب' على المستوى أ ب ج ع هى ب' ع' ب'

$$\text{ظا (ب' ع' ب')} = \frac{\text{ب' ب'}}{\text{ب' ع}} = \frac{\sqrt{2} \text{ ل}}{\sqrt{2} \text{ ل}} = 1$$

ثالثاً: لاحظ أن الشكل أ ب ج و مربع لماذا؟
ع' و = أ ب = ل

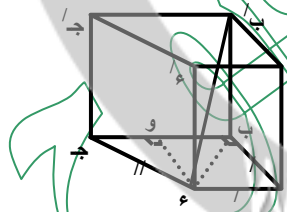
الزاوية الزوجية بين المستويين ب' ب' ج' ب' ، ع' ج' أ' ع' حرفها ج' ج'

ج' ج' \perp كل من ب' ج' ، ع' ج'

ب' ج' أ' هى الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

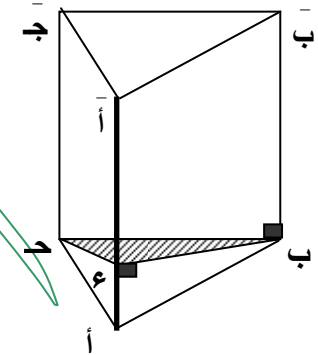
$$\text{جا (ب' ج' أ')} = \frac{\text{ع' و}}{\text{ع' ج'}} = \frac{\text{ل}}{\sqrt{2} \text{ ل}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ق (ب' ج' أ')} = 30^\circ$$

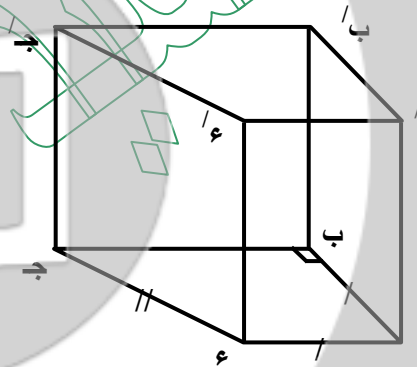


دور أول ٢٠١٤ : س، ص، ع ثلاث مستويات متوازية قطعها المستقيم ل فى
النقط أ، ب، ج كما قطعها المستقيم م فى النقط ع، هـ، و على الترتيب. فإذا
كان أو يقطع المستوى ص فى ن، وكان أ ب : ب ج = ١ : ٣ فاثبت أن :

$$\text{ج و} + \text{أ ع} = ٣ \text{ أ ع} + (\text{ب ن} + \text{ن هـ})$$



٢١. دور أول ٢٠١٣
فى الشكل المقابل :



أ ب ج ع أ' ب' ج' أ' منشور رباعى قائم قاعدته على شكل شبه منحرف قائم

الزاوية فى ب ، وفيه أ ب = أ ع = $\frac{1}{4}$ ج ع ، وكان أ' أ' = ج ع

(١) اثبت أن المستوى ب' ب' ع \perp المستوى أ ب ج ع

(٢) أوجد ظل زاوية ميل ب' ب' ع على المستوى أ ب ج ع

(٣) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ب' ب' ج' ب' ، ع' ج' أ' ع'

الحل :

أولاً : أ ب ج ع أ' ب' ج' أ' منشور قائم

ب' ب' \perp القاعدة أ ب ج ع